

基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量*

宋静¹, 张毅²

(1. 苏州科技大学数理学院, 江苏 苏州 215009;
2. 苏州科技大学土木工程学院, 江苏 苏州 215011)

摘要: 研究基于两类非标准 Lagrange 函数 (指数 Lagrange 函数和 Lagrange 幂函数) 的动力学系统的 Noether-Mei 对称性及其守恒量。首先, 给出基于指数 Lagrange 函数和 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性的定义与判据; 其次, 提出由系统的 Noether-Mei 对称性导致的 Noether 守恒量与 Mei 守恒量的存在条件及其形式, 给出四个 Noether-Mei 对称性定理。最后, 举例说明结果的应用。

关键词: 非标准 Lagrange 函数; Noether-Mei 对称性; Noether 守恒量; Mei 守恒量

中图分类号: O316 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 03-0026-05

Noether-Mei symmetry and conserved quantity for dynamical systems with non-standard Lagrangians

SONG Jing¹, ZHANG Yi²

(1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China;
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China)

Abstract: This paper focuses on studying the Noether-Mei symmetry and the conserved quantity for dynamical systems with non-standard Lagrangians (exponential Lagrangians and power law Lagrangians). Firstly, The definition and the criteria of Noether-Mei symmetry for dynamical systems with non-standard Lagrangians are given. Secondly, The conditions that Noether-Mei symmetry leads to Noether conserved quantity or Mei conserved quantity and the form of conserved quantities are put forward. And four theorems for Noether-Mei symmetry and conserved quantities are established. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Key words: non-standrad Lagrangian; Noether-Mei symmetry; Noether conserved quantity; Mei conserved quantity

动力学系统的对称性与守恒量因其具有重要的数学意义与物理意义, 现已成为分析力学一个活跃的研究方向, 并在现代数学、力学、物理学中占有及其重要的地位。力学系统的对称性主要有

Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性, 相应的守恒量主要有 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量^[1-6]。随着研究的深入, 诸多学者对两种以上对称性进行了研究, 并已取得一些成

* 收稿日期: 2016-10-08

基金项目: 国家自然科学基金 (11272227, 11572212); 苏州科技大学研究生科研创新计划 (SKYCX16_12)

作者简介: 宋静 (1992 年生), 女; 研究方向: 力学中的数学方法; E-mail: sandyquiet@hotmail.com

通信作者: 张毅 (1964 年生), 男; 研究方向: 动力学与控制; E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn

果^[7-11]。非标准 Lagrange 函数, 又称非自然 Lagrange 函数, 不同于经典的 Lagrange 函数, 它没有动能与势能的明显区分。近年来, 对于基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的研究已经取得一系列成果。Musielak^[12-13]研究了耗散系统中获得非标准 Lagrange 函数的方法及其存在条件, El-Nabulsi^[14-15]研究了非线性动力学系统基于两类非标准 Lagrange 函数的作用量及动力学方程, 并将非标准 Lagrange 函数应用于 Friedmann-Robertson-Walker 时空中, 讨论了非标准 Lagrange 函数在宇宙学中的影响。张毅等^[16-17]研究了基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether 对称性和降阶法。本文研究基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量, 给出系统的 Noether-Mei 对称性的定义和判据, 建立 Noether-Mei 对称性与 Noether 守恒量, Mei 守恒量之间的联系, 给出了四个 Noether-Mei 对称性定理, 并结合具体算例说明了结果的应用。

1 基于指数 Lagrange 函数的 Noether-Mei 对称性与守恒量

1.1 Noether-Mei 对称性

基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的运动微分方程为^[16]

$$\exp(L) \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \frac{dL}{dt} \right) = 0 \quad (1)$$

(s = 1, 2, \dots, n)

其中 t 为时间, q_s 为广义坐标, \dot{q}_s 为广义速度, $L = L(t, q_s, \dot{q}_s)$ 为 Lagrange 函数。

定义 1 对于基于指数 Lagrange 函数的动力学系统 (1), 如果一个对称性既是 Noether 对称性又是 Mei 对称性, 则称这个对称性为该系统的 Noether-Mei 对称性。

取时间 t 与广义坐标 q_s 的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (2)$$

其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, q_k, \dot{q}_k), q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, q_k, \dot{q}_k) \quad (3)$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小变换的生成元。

假设在无限小变换 (2) 下, 指数 Lagrange 函数 $\exp(L)$ 变换为

$$\exp(L^*) = \exp \left[L \left(t^*, q_s^*, \frac{dq_s^*}{dt^*} \right) \right] = \exp L(t, q_s, \dot{q}_s) + \varepsilon X^{(1)}(\exp L) + O(\varepsilon^2) \quad (4)$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \quad (5)$$

如果无限小变换 (2) 的生成元 ξ_0 和 ξ_s 满足方程

$$E_s [X^{(1)}(\exp(L))] = 0 \quad (6)$$

其中 $E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$, 方程 (6) 称为 Mei 对称性的确定方程, 则相应的对称性为基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Mei 对称性; 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$ 使无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) + \xi_0 + \exp(-L) \dot{G}_N = 0 \quad (7)$$

则相应的对称性为基于指数 Lagrange 函数的 Noether 对称性。于是有

判据 1 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$, 使得无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足判据方程

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \xi_0) + \xi_0 + \exp(-L) \dot{G}_N \right\}^2 + \{E_s [X^{(1)}(\exp(L))]\}^2 = 0 \quad (8)$$

则相应的对称性为基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性。

1.2 Noether-Mei 对称性导致的守恒量

定理 1 对于基于指数 Lagrange 函数的动力学系统 (1), Noether-Mei 对称性可导致 Noether 守恒量, 形如

$$I_N = \exp(L) \xi_0 + \exp(L) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_N = \text{const.} \quad (9)$$

证明 因为 Noether-Mei 对称性必是 Noether 对称性, 故存在规范函数存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$ 使得 Noether 等式 (7) 成立。由 Noether 定理知, 必有 Noether 守恒量式 (9)。

定理 2 对于基于指数 Lagrange 函数的动力学系统 (1), 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_M = G_M(t, q_s, \dot{q}_s)$ 满足 Mei 对称性的结构方程

$$X^{(1)}(\exp L) \xi_0 + X^{(1)} \{X^{(1)}(\exp L)\} + \dot{G}_M = 0 \quad (10)$$

则系统的 Noether-Mei 对称性导致 Mei 守恒量, 形如

$$I_M = X^{(1)}(\exp L) \xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_M = \text{const.} \quad (11)$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{dI_M}{dt} &= \frac{dX^{(1)}(\exp L)}{dt} \xi_0 + X^{(1)}(\exp L) \dot{\xi}_0 + \\ &\frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \\ &\frac{\partial X^{(1)}(\exp L)}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \ddot{q}_s \xi_0 - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) - \\ &X^{(1)}(\exp L) \dot{\xi}_0 - X^{(1)}[X^{(1)}(\exp L)] = \\ &\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \frac{dL}{dt} \right] \\ &\exp L \cdot (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \end{aligned}$$

1.3 算例

已知某指数 Lagrange 函数为^[16]

$$\exp(L) = \exp(tq\dot{q}) \quad (12)$$

其中 t 为时间, q 为广义坐标, \dot{q} 为广义速度, 试研究该系统的 Noether-Mei 对称性及守恒量。

系统的运动微分方程为

$$tq\ddot{q} + q\dot{q} + tq^2 + \frac{1}{t} = 0 \quad (13)$$

由式 (5) 可得

$$\begin{aligned} X^{(1)}(\exp(tq\dot{q})) &= \\ &[\xi_0 q\dot{q} + tq\dot{\xi} + tq(\xi - \dot{q}\xi_0)] \exp(tq\dot{q}) \quad (14) \end{aligned}$$

取无限小生成元

$$\xi_0 = t, \xi = -\frac{1}{q} \ln t \quad (15)$$

则有

$$X^{(1)}(\exp(tq\dot{q})) = -\exp(tq\dot{q}) \quad (16)$$

由式 (12) 容易验证生成元 (15) 满足 Mei 对称性的确定方程 (6), 故生成元 (15) 相应于系统的 Mei 对称性。由 Noether 等式 (7) 得

$$\begin{aligned} qq\dot{\xi}_0 + tq\dot{\xi} + tq(\xi - \dot{q}\xi_0) + \dot{\xi}_0 + \\ \exp(-tq\dot{q}) \dot{G}_N = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

将生成元 (15) 代入式 (17), 得

$$G_N = 0 \quad (18)$$

则生成元 (15) 相应于系统的 Noether 对称性。因此, 生成元 (15) 是基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性。据此给出与生成元 (15) 相应的 Mei 对称性结构方程

$$\begin{aligned} X^{(1)}[\exp(tq\dot{q})] \dot{\xi}_0 + X^{(1)} \\ \{X^{(1)}[\exp(tq\dot{q})]\} + \dot{G}_M = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= t \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{1}{q} \ln t \right) \frac{\partial}{\partial q} + \\ &\left(\frac{\dot{q}}{q^2} \ln t - \frac{1}{tq} - \dot{q} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad (20) \end{aligned}$$

由方程 (19) 和 (20) 得

$$G_M = 0 \quad (21)$$

由定理 2, 系统存在 Mei 守恒量

$$I_M = (t \ln t + t^2 q\dot{q} - t) \exp(tq\dot{q}) = \text{const.} \quad (22)$$

式 (22) 是由基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性导致的 Mei 守恒量。再将生成元 (15) 和规范函数 (18) 代入式 (9), 得到 Noether 守恒量

$$I_N = (t - t \ln t - t^2 q\dot{q}) \exp(tq\dot{q}) = \text{const.} \quad (23)$$

式 (23) 是由基于指数 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性导致的 Noether 守恒量。

2 基于 Lagrange 幂函数的 Noether-Mei 对称性与守恒量

2.1 Noether-Mei 对称性

基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的运动微分方程为^[16]

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) L^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\alpha}{L} \frac{dL}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0 \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad (24) \end{aligned}$$

其中 $L = L(t, q_s, \dot{q}_s)$ 为 Lagrange 函数。

定义 2 对于基于 Lagrange 幂函数的动力学系统 (24), 如果一个对称性既是 Noether 对称性又是 Mei 对称性, 则称这个对称性为该系统的 Noether-Mei 对称性。

假设在无限小变换 (2) 下, Lagrange 幂函数 $L^{1+\alpha}$ 变换为

$$L^{*1+\alpha} = L^{1+\alpha} \left(t^*, q_s^*, \frac{dq_s^*}{dt^*} \right) =$$

$$L^{1+\alpha}(t, q_s, \dot{q}_s) + \varepsilon X^{(1)}(L^{1+\alpha}) + O(\varepsilon^2) \quad (25)$$

如果无限小变换 (2) 的生成元 ξ_0 和 ξ_s 满足方程

$$E_s [X^{(1)}(L^{1+\alpha})] = 0 \quad (26)$$

其中方程 (26) 称为 Mei 对称性的确定方程, 则相应的对称性为基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Mei 对称性。如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$ 使无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \\ \frac{L}{1 + \alpha} \dot{\xi}_0 + \frac{1}{(1 + \alpha) L^\alpha} \dot{G}_N = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

则相应的对称性为基于 Lagrange 幂函数的 Noether 对称性。于是有

判据 2 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$, 使得无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足判据方程

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s} \xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \right.$$

$$\frac{L}{1 + \alpha} \dot{\xi}_0 + \frac{1}{(1 + \alpha)L^\alpha} \dot{G}_N \Big\}^2 + \{E_s [X^{(1)}(L^{1+\alpha})]\}^2 = 0 \quad (28)$$

则相应的对称性为基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性。

2.2 Noether-Mei 对称性导致的守恒量

定理 3 对于基于 Lagrange 幂函数的动力学系统 (24)，Noether-Mei 对称性可导致 Noether 守恒量，形如

$$I_N = L^{1+\alpha} \xi_0 + (1 + \alpha)L^\alpha \frac{\partial L}{\partial q_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_N = \text{const.} \quad (29)$$

证明 因为 Noether-Mei 对称性必是 Noether 对称性，故存在规范函数存在规范函数 $G_N = G_N(t, q_s, \dot{q}_s)$ 使得 Noether 等式 (27) 成立。由 Noether 定理知，必有 Noether 守恒量式 (29)。

定理 4 对于基于 Lagrange 幂函数的动力学系统 (24)，如果无线小生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_M = G_M(t, q_s, \dot{q}_s)$ 满足 Mei 对称性的结构方程

$$X^{(1)}(L^{1+\alpha}) \dot{\xi}_0 + X^{(1)}\{X^{(1)}(L^{1+\alpha})\} + \dot{G}_M = 0 \quad (30)$$

则系统的 Noether-Mei 对称性导致 Mei 守恒量，形如

$$I_M = X^{(1)}(L^{1+\alpha}) \xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\alpha})}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_M = \text{const.} \quad (31)$$

证明

$$\begin{aligned} \frac{dI_M}{dt} &= \frac{dX^{(1)}(L^{1+\alpha})}{dt} \xi_0 + X^{(1)}(L^{1+\alpha}) \dot{\xi}_0 + \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\alpha})}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\partial X^{(1)}(L^{1+\alpha})}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0 - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) - X^{(1)}(L^{1+\alpha}) \dot{\xi}_0 - X^{(1)}[X^{(1)}(L^{1+\alpha})] = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \frac{\alpha}{L} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \frac{dL}{dt} \right] \cdot (1 + \alpha)L^\alpha (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \end{aligned}$$

2.3 算例

已知某 Lagrange 幂函数为

$$L^{1+\alpha} = (t\dot{q} + q)^{1+\alpha} \quad (32)$$

其中 t 为时间， q 为广义坐标， \dot{q} 为广义速度，试研究该系统的 Noether-Mei 对称性及守恒量。

取 $\alpha = 1$ 时，系统的运动微分方程为

$$2\dot{q} + t\ddot{q} = 0 \quad (33)$$

由式 (5) 可得

$$X^{(1)}((t\dot{q} + q)^2) = 2(t\dot{q} + q)[\xi_0 \dot{q} + \xi + t(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0)] \quad (34)$$

取无限小生成元

$$\xi_0 = t, \quad \xi = -q/2 \quad (35)$$

则有

$$X^{(1)}((t\dot{q} + q)^2) = -(t\dot{q} + q)^2 \quad (36)$$

由式 (33) 容易验证生成元 (35) 满足 Mei 对称性的确定方程 (26)，故生成元 (35) 相应于系统的 Mei 对称性。由 Noether 等式 (27) 得

$$\dot{q}\xi_0 + \xi + t(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) + \frac{t\dot{q} + q}{2} \xi_0 + \frac{1}{2(t\dot{q} + q)} \dot{G}_N = 0 \quad (37)$$

将生成元 (35) 代入式 (37)，得

$$G_N = 0 \quad (38)$$

则生成元 (35) 相应于系统的 Noether 对称性。因此，生成元 (35) 是基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性。据此给出与生成元 (35) 相应的 Mei 对称性的结构方程

$$X^{(1)}[(t\dot{q} + q)^2] + X^{(1)}\{X^{(1)}[(t\dot{q} + q)^2]\} + \dot{G}_M = 0 \quad (39)$$

其中

$$X^{(1)} = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{3\dot{q}}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad (40)$$

由方程 (39) 和式 (40) 得

$$G_M = 0 \quad (41)$$

由定理 4，系统存在 Mei 守恒量

$$I_M = \dot{q}t^2(t\dot{q} + q) = \text{const.} \quad (42)$$

式 (42) 是由基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性 (35) 导致的 Mei 守恒量。将生成元 (35) 和规范函数 (38) 代入式 (29)，得到 Noether 守恒量

$$I_N = -\dot{q}t^2(t\dot{q} + q) = \text{const.} \quad (43)$$

式 (43) 是由基于 Lagrange 幂函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性导致的 Noether 守恒量。

3 结 论

本文给出了基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性，它既是系统的 Noether 对称性又是 Mei 对称性。由 Noether-Mei 对称性可以得到 Noether 守恒量和 Mei 守恒量。文中基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Noether-Mei 对称性推导出四个关于 Noether 守恒量和 Mei 守恒量的定理。本文的方法与结果具有普遍意义，可以推广到其他约束力学系统。

参考文献:

- [1] 梅凤翔. 李群李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [2] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.
- [3] DJUKIĆ D J S, VUJANOVIĆ B D. Noether's theory in classical nonconservative mechanics[J]. *Acta Mechanica*, 1975, 23(1): 17 – 27.
- [4] HOJMAN S A. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1992, 25: 291 – 295.
- [5] 王树勇, 梅凤翔. 相空间中完整约束系统的形式不变性[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2002, 41(6): 10 – 13.
WANG S Y, MEI F X. Form invariance of holonomic systems in phase space[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2002, 41(6): 10 – 13.
- [6] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2013, 52(4): 45 – 50.
ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a fractional action-like variational problem in phase space[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2013, 52(4): 45 – 50.
- [7] 方建会, 丁宁, 王鹏. 非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性[J]. *物理学报*, 2006, 55(8): 3817 – 3820.
FANG J H, DING N, WANG P. Noether-Lie symmetry of nonholonomic mechanical system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3817 – 3820.
- [8] 刘仰魁, 方建会. 相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性的两个守恒量[J]. *物理学报*, 2008, 57(11): 6699 – 6703.
LIU Y K, FANG J H. Two types of conserved quantities of Lie-Mei symmetry for a variable mass system in phase system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(11): 6699 – 6703.
- [9] 王雪萍, 张毅. Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2016, 55(4): 53 – 55.
WANG X P, ZHANG Y. Noether-Mei symmetry and conserved quantity of Birkhoffian system[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2016, 55(4): 53 – 55.
- [10] FANG J H, LIU Y K, ZHANG X N. New conserved quantities of Noether-Mei symmetry of mechanical system in phase space[J]. *Chinese Physics B*, 2008, 17(6): 1962 – 1966.
- [11] XIE Y L, JIA L Q. Special Lie-Mei symmetry and conserved quantities of Appell equations expressed by Appell function. *Chinese Physics Letters*, 2010, 27(12): 120201.
- [12] MUSIELAK Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(5): 295 – 302.
- [13] MUSIELAK Z E. General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 42(5): 2645 – 2652.
- [14] EL-NABULSI R A. Non-linear dynamics with non-standard Lagrangians [J]. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2013, 12(2): 273 – 291.
- [15] EL-NABULSI R A. Nonstandard Lagrangian cosmology [J]. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 2013, 7(1): 1 – 12.
- [16] ZHANG Y, ZHOU X S. Noether theorem and its inverse for nonlinear dynamical systems with nonstandard Lagrangians [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(4): 1867 – 1876.
- [17] 周小三, 张毅. 基于非标准 Lagrange 函数的动力学系统的 Routh 降阶法[J]. *力学季刊*, 2016, 37(1): 15 – 20.
ZHOU X S, ZHANG Y. Routh Method of reduction for dynamical systems with non-standard Lagrangians [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2016, 37(1): 15 – 20.